Les coordonnées de O vérifient l'équation de (H) $\Rightarrow O \in (H)$.

c) T : $(x-1)(x_0-1)-yy_0=1$

or $x_0=0$ et $y_0=0 \Rightarrow T: x=0$

Solution 6 :

1°/ $\Delta=(2u-i\overline{u})^2-4(-2iu\overline{u})=4u^2-4iu\overline{u}-(\overline{u})^2+8iu\overline{u}$

$=4u^2+4iu\overline{u}-(\overline{u})^2=(2u+i\overline{u})^2$

$z'=\dfrac{2u-i\overline{u}-2u-i\overline{u}}{2}=-i\overline{u}$

$z''=\dfrac{2u-i\overline{u}+2u+i\overline{u}}{2}=2u$

2°/a) $z_{\overrightarrow{AM'}}=z_{M'}-z_A=-i\overline{u}-2i=-i(x-yi)-2i$ (avec $u=x+iy$)

$=-y-(x+2)i$.

$z_{\overrightarrow{AM''}}=z_{M''}-z_A=2u-2i=2x+i(2y-2)$

A, M', M'' sont alignés si et seulement si $\begin{vmatrix} -y & 2x \\ -x-2 & 2y-2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$-y(2y-2)+2x(x+2)=0 \Leftrightarrow 2x^2+4x-2y^2+2y=0 \Leftrightarrow$

$(H): x^2+2x-y^2+y=0$

b) $M(x,y)\in(H) \Leftrightarrow x^2+2x-y^2+y=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^3}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}-\dfrac{(y-\frac{1}{2})^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$

c'est une équation cartésienne d'une hyperbole équilatère de centre $\Omega(-1,\frac{1}{2})$ de sommets $A(\frac{\sqrt{3}}{2}-1,\frac{1}{2})$ et $A'(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1,\frac{1}{2})$ et de foyers $F(\frac{\sqrt{6}}{2}-1,\frac{1}{2})$; $F'(-\frac{\sqrt{6}}{2}-1,\frac{1}{2})$. Les asymptotes sont $\Delta: Y=X$ et $\Delta': Y=-X$ donc $\Delta: y=x+\frac{3}{2}$ et $\Delta': y=-x-\frac{1}{2}$.

c) $(H): x^2+2x-y^2+y=0$